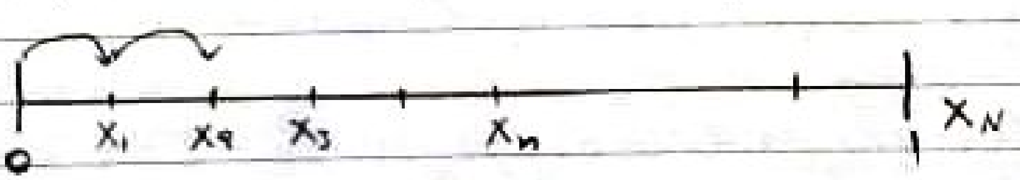
Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση

<u>Σκοπός</u>: Η μετατροπή μαθηματικών προβλημάτων σε ισοδύναμα προβλήματα που μπορούν να λυθούν ή να προσεγγιστούν με τη χρήση Η/Υ. Δηλαδή να λυθούν χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις 4 πράξεις της αριθμητικής.

Βασική έννοια είναι η "διακριτοποίηση", δηλαδή η μετατροπή ενός συνεχούς προβλήματος σε διακριτό.

<u>Παράδειγμα</u>: Το σύνολο $[0,1]$. Δηλαδή έχουμε το $x \in [0,1]$, άρα το x μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή $0 \le x \le 1$.
Στο διακριτό ζητάμε μια ακολουθία σημείων x_n ώστε να καλύψουμε "όλα" τα σημεία του $[0,1]$.
Κατ' αναλογία με την έννοια της διαμέρισης που μάθαμε στον Απειροστικό Λογισμό.



Αν για παράδειγμα θεωρήσω ισομερή διαμέριση

$$x_n = x_0 + n \cdot \frac{x_N - x_0}{N}$$
$$= x_0 + n\,\Delta x$$

Διακριτό $\to$ Συνεχές : $\Delta x \to 0$ ή $N \to \infty$
Το σύνολο αυτών των σημείων είναι πεπερασμένο!
πχ Αν $\Delta x = \frac{1}{2}$ $\quad \{x_n\} = \{\underset{x_0}{0}, \underset{x_1}{1/2}, \underset{x_2 = x_N}{1}\}$

Τροπος: Η δημιουργια/επινοηση "αξιοπιστων" και "αποτελεσματικων" μεθοδων για την επιλυση διαφορων προβληματων.

Αξιοπιστες. Μικρα σφαλματα στα δεδομενα και στους επιμερους υπολογισμους επιφερουν μικρο σφαλμα και στην τελικη λυση. Δηλαδη, το τελικο σφαλμα ειναι ελεγχομενο και σε επιθυμητα πλαισια.

Αποτελεσματικες: Να έχουν το μικροτερο υπολογιστικο κοστος σε συνδιασμό με το μικροτερο δυνατό απαιτουμενο χωρο αποθηκευσης ενδιάμεσων αποτελεσματων (μνήμη του Η/Υ)

Συνολικα, αν οι παραπανω προυποθεσεις τηρουνται, τοτε η μεθοδος θα λεγεται "καταλληλη" για το συγκεκριμενο πρόβλημα.

Παρατήρηση: Διαφορετικες μεθοδοι ειναι κατάλληλες για διαφορετικά προβλήματα.

Παράδειγμα: Ο υπολογισμός του $e = 2,71828\ldots$
Γνωριζουμε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Θεωρημα Taylor)

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

Άρα για $x=1$: $\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$

$$= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} + R_{N+1}$$

$N \to \infty$

Το R_{N+1} αντιστοιχεί στο "σφάλμα" του υπολογισμού με τα πεπερασμένα αθροίσματα.

Π.χ. Αν ζητήσουμε ακρίβεια υπολογισμού 10^{-2}, θα πούμε ότι $R_{N+1} < 10^{-2}$
Ζητάμε το πλήθος των όρων που χρειάζονται για να έχω λάθος $R_{N+1} < 10^{-2} \Longleftrightarrow \frac{1}{(N+1)!} < 10^{-2}$

$\Longleftrightarrow (N+1)! > 100 \Longrightarrow N=4$

Πράγματι $(4+1)! = 5! = 120$ ενώ $(3+1)! = 4! = 24$
Άρα $e \simeq \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} = 2{,}7183$

Χρειάστηκα μόλις 5 όρους για να υπολογίσω το e με σφάλμα $< 10^{-2}$.

Παράδειγμα Πράξεις με μεγάλους αριθμούς και το e^{-x}. Να υπολογιστεί το $e^{-5.5}$.
Όπως και πριν γράφω: $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$

αντικαθιστώ $x=5{,}5$ στη σειρά και κρατάω 25 όρους.
Τότε $e^{-5,5} \cong \sum_{n=0}^{25} (-1)^n \frac{5{,}5^n}{n!} = 0{,}0026363$

Πραγματική τιμή $e^{-5,5} = 0{,}0040868$

Μη ασαδικτή μέθοδος

Παράδειγμα Ο υπολογισμός του $\pi = 3{,}14159\ldots$
Γνωρίζουμε ότι $\tan^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,dy$ (αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1}x = \operatorname{arc}\tan x$)

Για $x=1$, $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα (εδώ έχω γεωμετρική σειρά).

$$\underbrace{\frac{1}{1+y^2}}_{} = (1+y^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n}, \quad 0<y<1$$

$1-(-y^2)$

$y^2=-1$

Αντικαθιστώ $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy =$

$$= 4\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{2n}\,dy = 4\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 y^{2n}\,dy$$

$$\Longrightarrow \pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Ζητάμε να βρούμε την τιμή του π με ακρίβεια 10^{-2}. Ξαναγράφουμε ως μερικά αθροίσματα με $R_{N+1} = \left|\frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)+1}\right|$ και ζητάμε $\frac{1}{2N+3} < 10^{-2} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 2N+3 > 100 \Longleftrightarrow N > 97/2 = 49$$

Δηλαδή πλέον χρειάζομαι 50 όρους για να βρω το π με ακρίβεια 10^{-2}.

Παρατηρήσεις:

a) Θυμόμαστε ότι για το εκθετικό χρειάστηκα 5 όρους!.

b) Πόσοι θα χρειαστούν για ακρίβεια 10^{-3} ή 10^{-4};

c) Γιατί μπορώ να αλλάξω σειρά και ολοκλήρωμα; Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^{2n}$ συγκλίνει για $0<y<1$.